LA TEORIA DELLE TRECCE

Emil Artin
Princeton University
[1949]

La teoria delle trecce mostra l'interazione fra due discipline di matematica pura - la topologia, usata nella definizione delle trecce, e la teoria dei gruppi, usata nel loro trattamento.

I fondamenti della teoria possono essere compresi senza troppa conoscenza tecnica. Ha avuto origine da un problema molto più antico di matematica pura - la classificazione dei nodi. Si sono compiuti molti progressi in questo campo, ma ogni progresso sembra non faccia altro che evidenziare le estreme difficoltà del problema. Oggi siamo ancora molto lontani da una soluzione completa. In considerazione di questo fatto è consigliabile studiare oggetti che siano in qualche modo simili ai nodi, ma abbastanza semplici da rendere possibile una completa classificazione. Le trecce sono oggetti di questo genere.

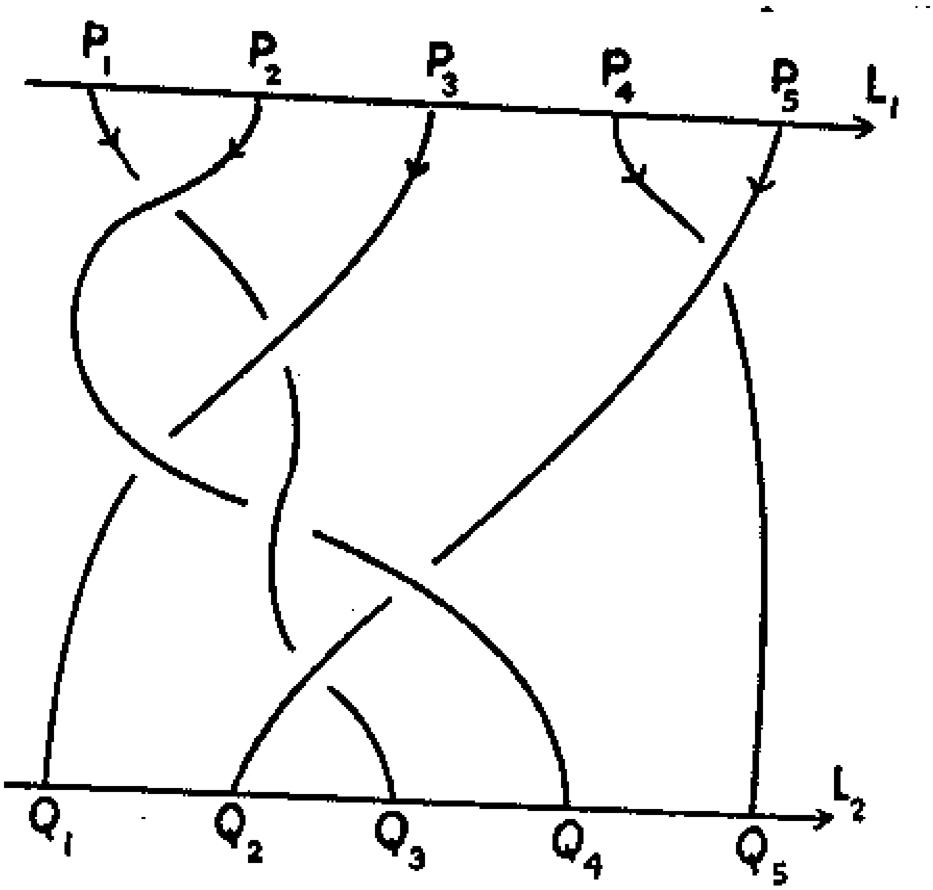


FIGURA 1

Per sviluppare la teoria delle trecce cominciamo spiegando cosa intendiamo con un *model-*

lo d'intreccio[1] di ordine n (n sta per un numero ordinale intero che sarà 5 nel caso della figura 1). Siano L_1 ed L_2 due linee rette parallele nello spazio orientate nello stesso senso (indicato dalle frecce). Se P è un punto su L_1, Q un punto su L_2, potremo congiungere P e Q con una curva c. Nel nostro disegno possiamo indicare solo la proiezione di c sul piano che contiene L_1 ed L_2 , dato che la stessa c può essere una curva che si snoda {winding} nello spazio.

La natura delle curve c che useremo sarà limitata dalle condizioni seguenti. Se R è un punto sulla proiezione di c che si muove da P a Q, la sua distanza dalla linea L_1 aumenterà sempre. (Quindi una curva che un po' scende, poi sale, e alla fine scende di nuovo, sarà esclusa.) Per disporre di un nome breve per queste curve, le chiameremo curve normali. Le orientiamo (con delle frecce) nella direzione da P a Q.

Indichiamo n punti su L_1 . Spostandoci su L_1 nella direzione indicata dalle frecce, chiameremo il primo degli n punti dati P_1 , il successivo P_2, e l'ultimo P_n . Analogamente denomineremo Q_1 , Q_2 , . . . Q_n , n punti sulla linea L_2 . Ora uniamo ogni punto P_1 con uno dei punti Q_1 , mediante una curva normale c_1 (c_1 comincia in P_1 e finisce in qualche Q_1 , che può essere o non essere Q_1). Osserviamo solo la condizione seguente: data una coppia di curve c_1 , esse non possono intersecarsi nello spazio. Quindi due curve qualsiasi non possono finire nello stesso punto Q_1.

Se vogliamo indicarlo in un disegno, dobbiamo superare la difficoltà per la quale, sebbene le curve non si incontrino nello spazio, le loro proiezioni possono passare una sull'altra. Per indicare che in un certo incrocio la curva c_1 è sotto a un'altra, interrompiamo un poco la sua proiezione (questo è il modo convenzionale per indicare questi casi nei disegni tecnici).

L'intero sistema di linee diritte e curve si chiamerà modello d'intreccio {weaving pattern}.

Per spiegare la nozione di treccia cominciamo con un dato modello d'intreccio e pensiamo le linee L_1 ed L_2 come fatte di un materiale rigido, mentre le curve c_1 sono considerate arbitrariamente estensibili, contraibili e flessibili.[nota di chiusura1] I punti P_1 e Q_1 possono anche muoversi sulle rispettive linee fermo stando che il loro ordine deve sempre rimanere costante.

Noi sottoponiamo l'intero modello d'intreccio a una deformazione arbitraria nello spazio limitata dalle seguenti condizioni:

1) L_1 ed L_2 restano parallele durante le deformazioni (mentre possono essere mosse liberamente nello spazio: la loro distanza può cambiare).

2) In nessuna coppia di curve c_1 una curva ne interseca un'altra durante la deformazione (questo significa che la sua materia è "impenetrabile").

3) Le curve restano normali durante la deformazione (ma posso essere comunque estese o contratte a seconda di quel che richiede la situazione).

Dopo una tale deformazione abbiamo un modello d'intreccio che può apparire completamente diverso da quello dal quale eravamo partiti. Un pattern dall'aspetto completamente docile {tame-looking} può in effetti (dopo la deformazione) diventare tremendamente ingarbugliato.

Intendiamo per treccia un modello d'intreccio con la possibilità di deformarlo secondo le

---

[1] Si è tradotto *weaving pattern* con *modello d'intreccio*. O schema di tessitura?

regole ora enunciate. Se presentiamo un modello d'intreccio, questo descrive una treccia. Ma un'infinita quantità di modelli descriverà la stessa treccia, segnatamente tutti quelli che possono essere ottenuti da quella data tramite una deformazione. L'ordine n del modello sarà chiamato l'*ordine della treccia*.

Si pone ora il seguente problema fondamentale. Dati due modelli d'intreccio è possibile decidere se essi rappresentano o non rappresentano la stessa treccia? In altre parole, è possibile decidere se si può o non si può deformare un modello in un altro modello dato?

Fino ad ora abbiamo preso in considerazione trecce di un qualsiasi ordine n. Da questo momento stabiliamo che n sia un dato intero, scelto a piacere, e ci limitiamo, senza affermarlo esplicitamente, a trecce di quel dato ordine n.

Siano ora A e B due trecce. Spieghiamo in primo luogo cosa intendiamo per prodotto AB di A e B. Selezioniamo due modelli definiti per A e B. Chiamiamo rispettivamente L_1, L_2, P_1, Q_1, c_1 le linee, i punti e le curve di A, ed L'_1, L'_2, P'_1, Q'_1, c'_1 quelli di B.

Deformiamo B fino a far coincidere il piano che passa per L'_1 ed L'_2 con il piano che passa per L_1 ed L_2, fino a che la linea L_2 (incluso il suo orientamento) coincida con la linea L'_1, facendo in modo che L_1 ed L'_2, si trovino su u lati diversi di L_2. Infine deformiamo B fino a che i punti Q_1 coincidano con i punti P'_1. Ottenuto questo, cancelliamo la linea L_2, ottenendo

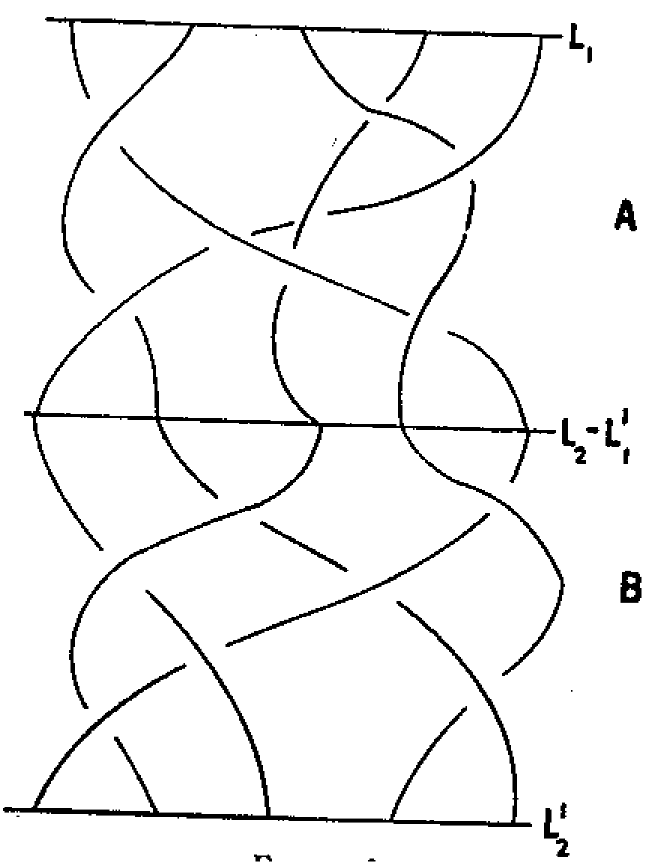


FIGURA 2

un nuovo modello d'intreccio composto che designerà il modello della treccia AB.

Intuitivamente parlando, questo significa che si ottiene AB congiungendo l'inizio di B con la fine di A. La figura due illustra il procedimento. Il motivo per chiamare prodotto il risultato di questo processo risiede nel fatto che il processo ha alcune somiglianze con un'ordinaria moltiplicazione di numeri.

In primo luogo mostriamo:

$$(AB)C = A(BC)$$

ovvero la proprietà associativa della moltiplicazione.

Cosa significa $(AB)C$? Significa: formare prima AB e poi comporlo con C. Allo stesso modo si lega B ad A e al risultato si lega C. D'altra parte, cosa significa $A(BC)$? Ci chiede di formare prima BC, che significa legare C con B. Il risultato sarà legato con A. Ovviamente otteniamo la stesso modello di $(AB)\,C$.

Ma questa somiglianza non porta troppo lontano. Per esempio, la legge $AB = BA$ è in generale falsa. Lo dimostrano esempi semplicissimi. Può funzionare accidentalmente solo per trecce molto particolari.

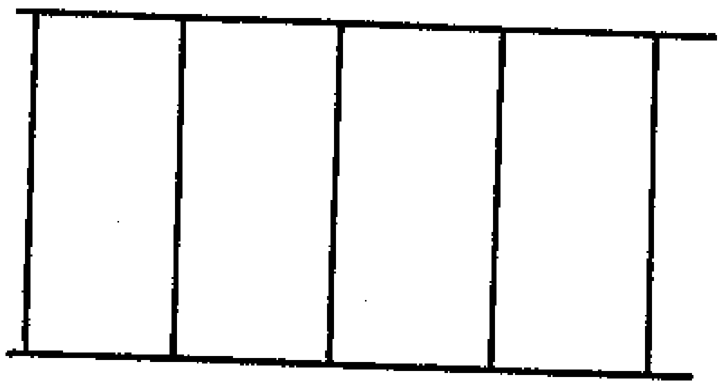


FIGURA 3

Quindi nei calcoli si deve fare attenzione in un prodotto all'ordine dei termini.

Indichiamo con I la treccia indicata nella figura 3. In questo modello le curve c_I sono semplicemente linee diritte che uniscono P_I e Q_I senza incroci. Se leghiamo I a una qualsiasi treccia A, è piuttosto evidente che la treccia risultante AI può ridiventare A; infatti alla linea L_2 può essere semplicemente sostituita da una linea più bassa. Perciò $AI = A$ per ogni treccia A; analogamente vediamo $IA = A$ per ogni A.

La nostra treccia I ha perciò una forte somiglianza con il numero 1 (in quanto $1 \cdot a = a \cdot 1$ per ogni numero a). Questo spiega la scelta del nome I (1 nei numeri romani).

Cosa significa l'equazione $A = I$? Se A è originariamente data come un modello complesso, allora $A = I$ significa che con alcune deformazioni questo modello può essere trasformato nel modello della figura 3. Possiamo dire, intuitivamente: $A = I$ significa che A può essere pettinata.

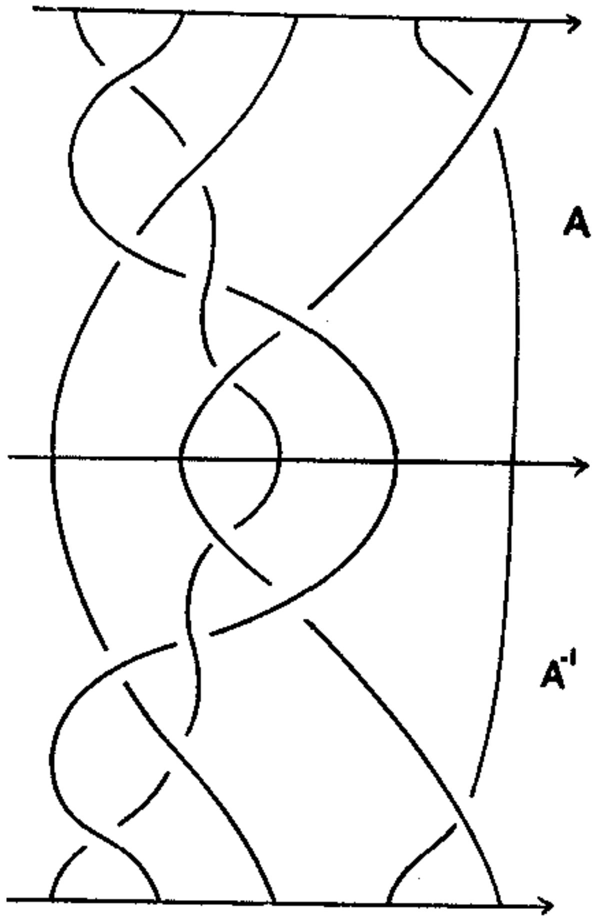


FIGURA 4

La figura 4 mostra la treccia A della figura 1, e ad essa è legata la sua esatta riflessione sulla linea L_2, che possiamo chiamare A^{-1}. Il lettore può convincersi che la treccia combinata AA^{-1} può essere sciolta se comincia a rimuovere gli incroci dal centro verso l'esterno. Allo stesso modo possiamo vedere che $A^{-1}A$ può essere pettinata. nota a piè pagina 2

Esiste quindi per ogni treccia A un'altra treccia A^{-1} (la sua riflessione) tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Il simbolo A^{-1} è scelto per analogia con l'algebra elementare, dove a^{-1} sta per il numero $1/a$ tale che $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ per ogni numero a diverso da 0.

Riassumendo possiamo dire: le trecce formano un sistema di oggetti per i quali è definita una moltiplicazione. Per questa moltiplicazione vigono tre proprietà:

1) Il principio associativo $(AB)C = A(BC)$ è soddisfatto.

2) Esiste una treccia che chiamiamo I tale che AI = IA = A vale per ogni treccia A.

3) Per ogni treccia A si può trovare un'altra treccia A^{-1} tale che

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Se in questi tre enunciati sostituissimo la parola "treccia" con la frase "oggetto del sistema", otterremmo l'esatta definizione di ciò che in algebra superiore si chiama "gruppo". Un gruppo è semplicemente un sistema di oggetti scelti arbitrariamente, unito ad alcuni tipi di moltiplicazione tali che vigano le nostre tre proprietà. Possiamo quindi dire: il sistema di tutte le trecce di ordine n è un gruppo.

La teoria dei gruppi è stata ampiamente sviluppata, e i suoi metodi possono essere applicati al nostro problema. Guardiamo la particolare treccia indicata nella figura 5. Qui la curva c_1 una volta passa sopra alla curva c_{1+1}, mentre tutte le altre curve sono linee diritte che connettono P_1 e Q_1. Chiamiamo questa treccia σ_1 e otteniamo in questo modo n-1 trecce σ_1, σ_2, . . . σ_{n-1} (σ_n non esiste perché implicherebbe una curva n+1$^{\text{ma}}$)[2]. La treccia nella quale c_1 va sotto c_{1+1} non richiede nessun nuovo nome. È la riflessione di σ_1 e può quindi essere scritta con σ_1^{-1}.

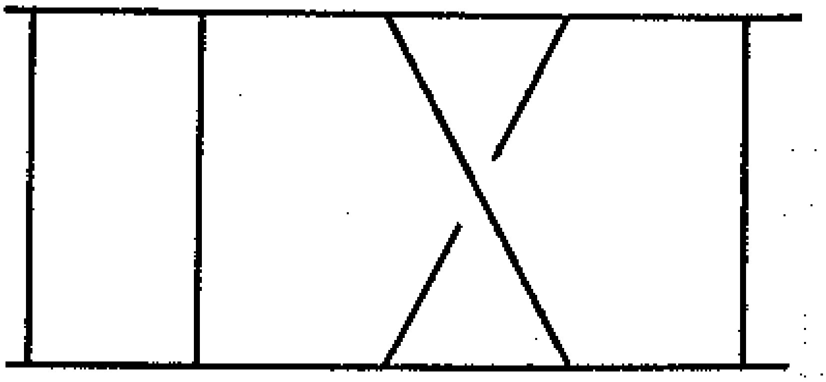


FIGURA 5

Consideriamo ora il modello di ogni treccia A, ad esempio la treccia della figura 1. Nella sua proiezione possono essere presenti due incroci esattamente alla stessa altezza. Ma è evidente che una lieve deformazione della treccia A produrrà un modello in cui questo non accade.

Tagliamo il nostro modello in piccole sezioni orizzontali, in modo che solo un dato incrocio sia presente in ogni sezione. La nostra treccia A si ottiene legando nuovamente fra loro tutte queste sezioni. Ovviamente ciascuna di queste sezioni è una treccia σ_1 o una treccia σ_1^{-1}, a seconda della natura degli incroci.

La treccia nella Figura 1, ad esempio, è data da:

$$\mathrm{A} = \sigma_1^{-1}\,\sigma_4^{-1}\,\sigma_2^{-1}\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_2\,\sigma_1$$

[2] *1-st*: va reso in italiano con 1^{ma} o 1°?

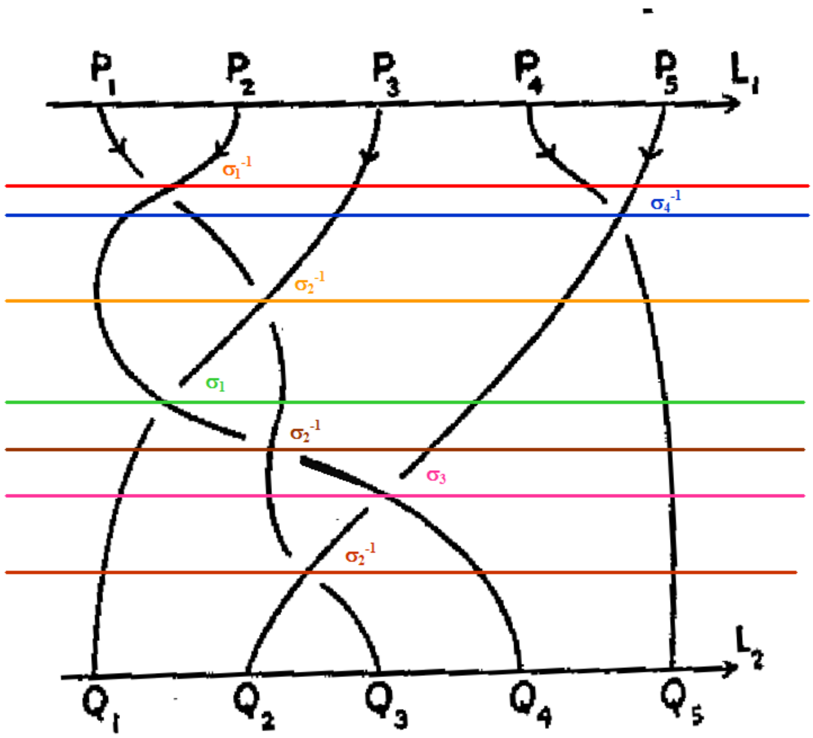


FIGURE 1

$$A = \sigma_1^{-1}\,\sigma_4^{-1}\,\sigma_2^{-1}\sigma_1\,\sigma_2^{-1}\sigma_3\,\sigma_2^{-1}$$ [3]

Se ogni elemento di un gruppo può essere espresso come il prodotto fra alcuni elementi σ_l e i loro inversi, diciamo che gli σ_l sono generatori del gruppo. Possiamo quindi affermare: gli n - 1 elementi σ_l sono generatori del gruppo di trecce.

Siamo ora in condizione di descrivere qualunque modello d'intreccio. Come esempio guardiamo le trecce di capelli di una ragazza. Uno sguardo attento rivela che questo tipo di treccia può essere così descritta:

$$A = \sigma_1\,\sigma_2^{-1}\,\sigma_1\,\sigma_2^{-1}\,.\,.\,.\,\sigma_1\,\sigma_2^{-1} = (\sigma_1\,\sigma_2^{-1})^{k}$$

[3] Questa figura 1 è stata modificata e inserita nella traduuzione, per capire il criterio dei numeri in pedice. Nella rappresentazione bidimensionale σ_1 e σ_1^{-1} indicano l'incrocio - nella rappresentazione bidimensionale - fra la linea che si trova al primo posto nella retta orientata che passa per l'incrocio stesso e quella che si trova accanto, $\sigma_2\,\sigma_2^{-1}$ indicano l'incrocio fra quella che si trova al secondo e quella che si trova al terzo posto, $\sigma_3\,\sigma_3^{-1}$ fra quella al terzo e quella al quarto, $\sigma_4\,\sigma_4^{-1}$ fra il quarto e il quinto. In una treccia di ordine n, gli incroci saranno: $\sigma_1\,\sigma_2\,.\,.\,.\,\sigma_n^{-1}$.

dove k indica il numero delle ripetizioni del modello di intreccio elementare.

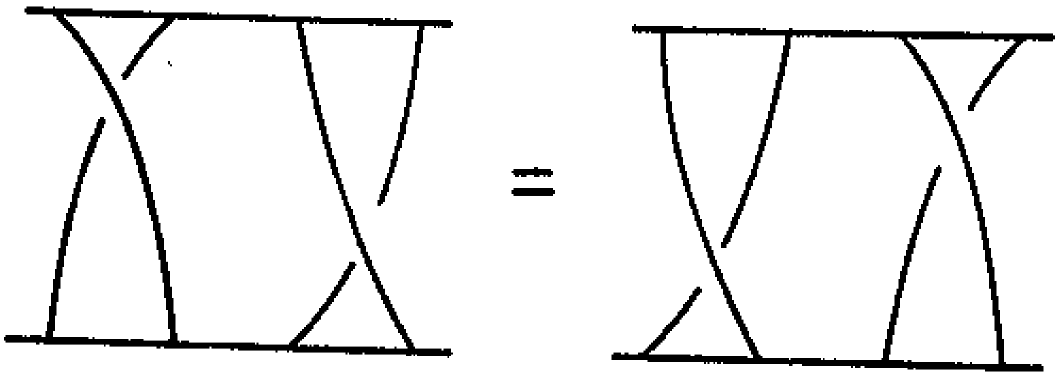


FIGURA 6

La figura 6 mostra l'eguaglianza $\sigma_1 \; \sigma_3 = \sigma_3 \; \sigma_1$.

Una figura simile mostrerebbe $\sigma_i \; \sigma_j = \sigma_j \; \sigma_i$ se j è i+2 o maggiore. Che $\sigma_1 \; \sigma_2$ è diversa da $\sigma_2 \; \sigma_1$ si può vedere con un semplice disegno; in $\sigma_1 \; \sigma_2$ la curva c_1 corre da P_1 a Q_3 , mentre in $\sigma_2 \; \sigma_1$ corre da P_1 a Q_2.

Ma $\sigma_2 \;\; \sigma_{1+1} \;\; \sigma_1 \; = \sigma_{1+1} \;\; \sigma_1 \;\; \sigma_{1+1}$. La figura 7 lo mostra per i = 1; il lettore deforma facilmente i due modelli uno nell'altro.

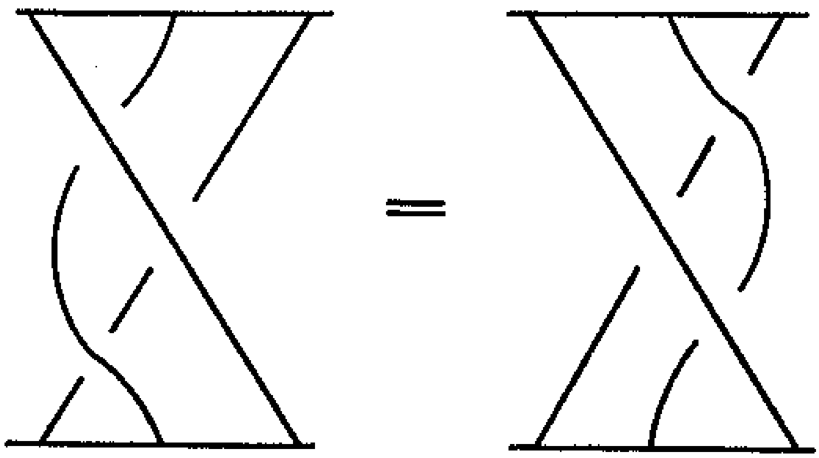


FIGURA 7

Abbiamo visto che il gruppo ha n - 1 generatori. Attualmente possiamo cavarcela solo con due: precisamente σ_1 e la treccia

$$a = \sigma_1 \;\; \sigma_2 \; . \; . \; . \; \sigma_{n-1} \text{ (prodotto)}$$

Dimostriamo l'enunciato per n = 5. Noi abbiamo

$$a\ \sigma_1 = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4 \cdot \sigma_1$$

Ma $\sigma_4\,\sigma_1 = \sigma_1\,\sigma_4$; quindi $a\ \sigma_1 = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_1\,\sigma_4$.
Ora $\sigma_3\,\sigma_1 = \sigma_1\,\sigma_3$; da qui $a\ \sigma_1 = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_1 \cdot \sigma_3\,\sigma_4$. [4]
Da $\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_1 = \sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_2$, otteniamo $a\ \sigma_1 = \sigma_2\,\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4$.
Quindi $a\ \sigma_1 = \sigma_2\,a$ oppure $a\ \sigma_1\,a^{-1} = \sigma_2\,a\,a^{-1} = \sigma_2 \cdot \mathrm{I} = \sigma_2$.
Pertanto $\sigma_2 = a\ \sigma_1\,a^{-1}$.
Analogamente:

$$a\ \sigma_2 = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4 \cdot \sigma_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_2 \cdot \sigma_4 = \sigma_1 \cdot \sigma_3\,\sigma_2\,\sigma_3 \cdot \sigma_4 =$$
$$\sigma_3 \cdot \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4 = \sigma_3\,a$$

Segue che $a\ \sigma_2\,a^{-1} = \sigma_3$, oppure $\sigma_3 = a\ \sigma_2\,a^{-1}$
Sostituendo il nostro risultato per σ_2 si ottiene

$$\sigma_3 = a\ a\ \sigma_1\ a^{-1}\,a^{-1} = a^2\,\sigma_1\ a^{-2} .$$

Infine:

$$a\ \sigma_3 = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4\,\sigma_3 = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_4\,\sigma_3\,\sigma_4 = \sigma_4\,\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4 = \sigma_4\ a$$

Conseguentemente $a\ \sigma_3\,a^{-1} = \sigma_4$. Sostituendo per σ_3:

$$\sigma_4 = a\ \sigma_3\ a^{-1} = a\ a^2\ \sigma_1\ a^{-2}\,a^{-1} = a^3\,\sigma_1\ a^{-3} .$$

In una formula:

$$\sigma_1 = a^{1-1}\ \sigma_1\,a^{-(1-1)} .$$ [5]

Ogni σ_1 può essere espresso da a ed σ_1 e perciò ogni treccia A può essere espressa da a ed σ_1.
In quel che segue non faremo uso di questo risultato.
Le formule:
1) $\sigma_i\ \sigma_j = \sigma_j\ \sigma_i$ se j è almeno i+2
2) $\sigma_i\ \sigma_{j+1}\ \sigma_i = \sigma_{j+2}\ \sigma_i\ \sigma_{j+1}$ [6]
hanno il seguente significato:
Supponiamo due trecce A e B date come modelli. Ogni modello può essere usato per esprimere A e B rispettivamente come un prodotto di termini σ_1 o σ_1^{-1}.

Se $A = B$, deve essere in qualche modo possibile passare dall'espressione A all'espressione B. Si può dimostrare che questo può sempre essere fatto con un uso ripetuto delle formule 1) o 2), o delle semplici conseguenze algebriche [nota7] di queste formule. Ci si riferisce a questo fatto dicendo: il gruppo delle trecce ha le relazioni che definiscono 1) e 2). La dimostrazione è troppo lunga per essere presentata qua.
Procediamo ora col nostro problema fondamentale. Consideriamo dapprima una treccia A

[4] Come mai il punto della moltiplicazione a volte compare poi scompare?
[5] Formula da controllare, nel pdf non si legge bene
[6] Formula da controllare, nel pdf non si legge bene
[7] Si è tradotto con *conseguenze algebriche* l'inglese *algebraic consequences*. Va corretto?

nella quale le curve c_1 connettono P_1 con Q_1 (Q_1 esattamente con lo stesso pedice).

Supponiamo di rimuovere la curva c_1. Una determinata treccia A_1 di ordine n-1 resta. Ora reinseriamo una curva d_1 fra P_1 e Q_1 che non è intrecciata in nessun modo con le altre stringhe (questo significa che la sua proiezione non presenta nessun incrocio). Chiamiamo B questa nuova treccia di ordine n.

Indichiamo ora con C la treccia AB^{-1}. Questa treccia C ha una peculiare proprietà. Se viene rimossa la prima stringa di C, la treccia che rimane dalla *A-parte* di C è A_1 , e A^{-1}è la parte che rimane da B^{-1}. (Coerentemente con la nostra costruzione, A e B differiscono solo per la loro prima stringa). Pertanto la rimozione della prima stringa da C lascia $A_1 A_1^{-1}$ = I, una treccia che può essere pettinata. Per essere sicuri, lo stesso C non può sicuramente essere pettinato finché non sia stata rimossa la prima stringa.

Supponiamo ora che questa operazione di pettinatura con le ultime stringhe n - 1 di C sia effettuata a forza, nonostante la presenza della prima stringa. Dal momento che la prima stringa è estensibile a piacere, può essere allungata [8] in questa operazione di pettinatura. Alla fine la prima stringa sarà terribilmente ingarbugliata, ma il risultato si presenterà in un modo simile a quello illustrato nella figura 8. Un modello di questo tipo si chiama 1-puro.[9].

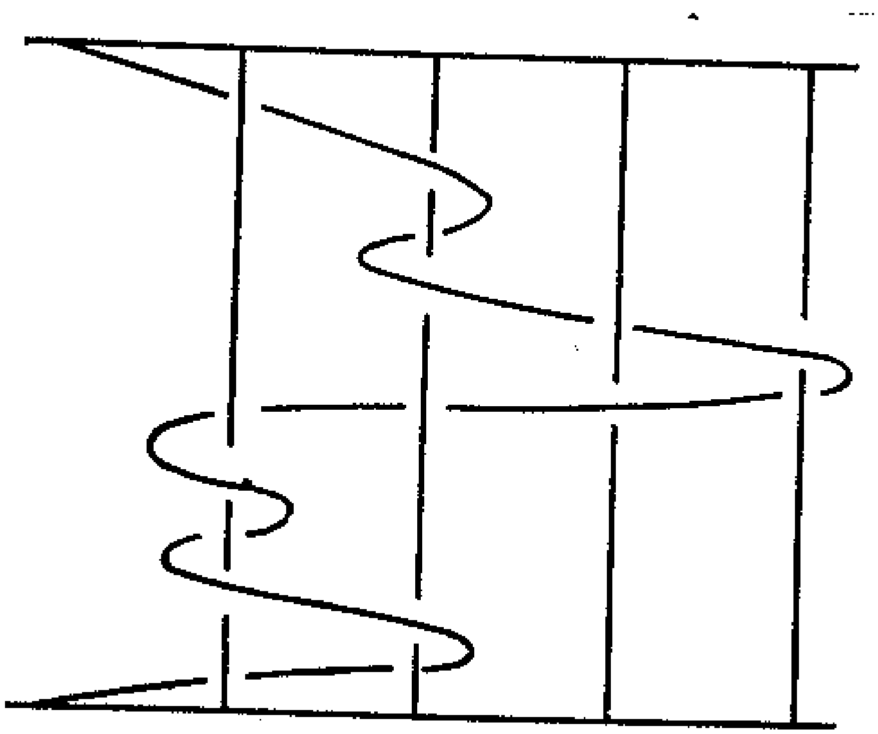


FIGURA 8

Ora $AB^{-1} = C$; $AB^{-1}B = CB$; pertanto $A = CB$. Così A è un prodotto di *1-pura* treccia C e di un'altra treccia B ottenuta da una treccia di ordine n - 1 nella quale si è inserita una prima stringa che nelle proiezioni non incontra nessuna delle altre. La seconda stringa di B può

[8] *to take along*: allungare?
[9] *1-pure*: *1-puro*. Così dice Luca Migliorini.

essere trattata nello stesso modo, e così via.

Il risultato finale è:

$$A = C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$$

dove C_I è una treccia del seguente tipo: tutte le stringhe tranne la i^{esima} sono linee verticali diritte, e la i^{esima} è solo avvolta intorno a stringhe di numero superiore[10]. Questo evidentemente significa che per ogni treccia A si può trovare un modello di questo genere particolare. nota di chiusura 3

La soluzione del nostro problema fondamentale consiste nell'asserzione che un modello di questo tipo descrive unicamente la treccia; vale a dire, che al fine di dimostrare se $A = B$ per due trecce le cui curve c_1 connettono P_1 con Q_1 si deve solo portare A e B in questa forma e vedere se ne risulta esattamente lo stesso modello. La dimostrazione di questo fatto è molto complessa e non può essere presentata in questo contesto. Né descriveremo la traslazione della nostra procedura geometrica nel linguaggio teorico dei gruppi.

È chiaro che questa procedura contiene la soluzione dell'intero problema di decidere se $A = B$ per qualsiasi coppia di trecce A e B date da modelli d'intreccio. Anzitutto A e B significa la stessa cosa di $AB^{-1} = \mathrm{I}$. La treccia I connette P_1 con Q_1. Nel caso che AB^{-1} non lo faccia, allora certamente A non è uguale a B. Nel caso in cui AB^{-1} connetta ogni P_1 con Q_1 il precedente metodo rende possibile decidere se $AB^{-1} = \mathrm{I}$ oppure no.

Accenniamo infine a un problema irrisolto della teoria delle trecce.

Se noi muoviamo nota11 una volta una treccia intorno a un asse, e la chiudiamo identificando P_1 e Q_1, e rimuoviamo le linee L_1 ed L_2, otteniamo ciò che chiameremo una treccia chiusa. Anche in questo caso sono pemesse tutte le deformazioni nel corso delle quali le curve non attraversino l'asse, né si attraversino fra loro.

Il problema della classificazione delle trecce, infine, può essere traslato in un problema della teoria dei gruppi. Siano A e B due trecce aperte. Le trecce chiuse corrispondenti sono uguali se, e solo se, si può trovare una treccia X tale che

$$B = XAX^{-1}$$

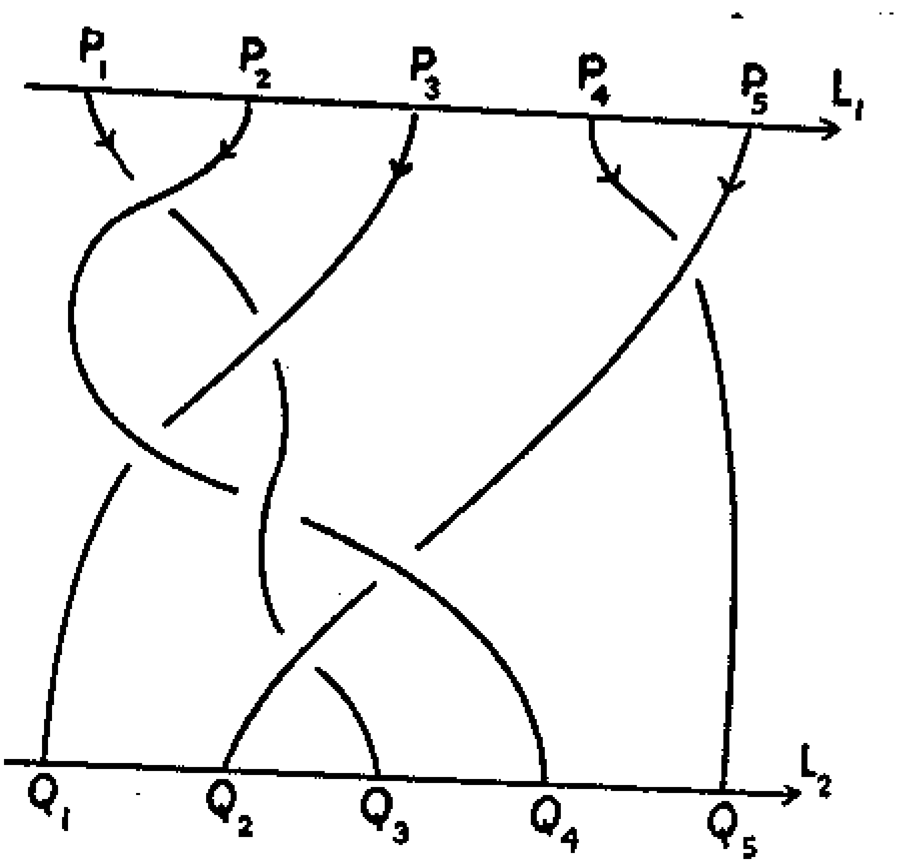
Non è stata ancora trovata una soluzione per questo problema. Siccome in qualche modo le trecce chiuse somigliano ai nodi, tale soluzione sarebbe applicabile al problema dei nodi. Avrebbe inoltre numerose applicazioni in matematica pura. nota di chiusura 4

Riferimenti

1. Artin, E. Theory of braids. *Annals of Mathematics* 48, 1947.
2. Artin, E. Braids and permutations. *Annals of Mathematics* 49, 1948.
3. Bohnenblust, F. The algebraic braid group. *Annals of Mathematics* 48, 1947.
4. Chow, W. L. On the algebraic braid group. *Annals of Mathematics* 49, 1948.

[10] *involved with strings of higher number*: controllare traduzione italiana.

[11] *wind around*: muovere intorno?



$\sigma^{-1}\,\sigma^{-4}\,\sigma^{-2}\,\sigma^{1}\,\sigma^{-2}\,\sigma^{3}\,\sigma^{-2}$

[1] Per il pizzo macramè si fissa un filo rigido - che potrebbe indicare L_1 - , e da questo si parte per annodare altri fili. In fondo, prima delle frange, che possono non esserci, si fissa qualcosa che potrebbe stare per L_1 , e nei casi più complessi si possono avere altri fili rigidi paralleli attorno ai quali passano i fili. Dopo ogni filo rigido ci sono delle variazioni di motivo, come in una moltiplicazione di trecce. In questo caso però si tratta di trecce non pettinabili.

[2] A questo proposito si possono fare speculazioni e ipotesi interessanti sulla fiaba. E anche sulla realtà psichica in genere. Se nella fiaba il soggetto definito da una treccia A riesce a percorrere - a costruire con il suo percorso - una vicenda A^{-1} il soggetto torna al punto di partenza. Questo dovrebbe valere sia per le fiabe a lieto fine, che per le fiabe con finale tragico. La stupidità che fa fallire Tontonio e lo Scemo della favola umbra sono pensabili come moltiplicazioni della stessa treccia iniziale con il proprio riflesso: il risultato è lo stesso. Ma mentre nella favola umbra ad ogni diversa treccia il risultato finale è identico, nella favola di Tontonio ciò che il soggetto possiede non viene perduto: il soggetto cambia, fa un nuovo movimento, smette di farsi deprivare o picchiare, causa la bastonatura del rivale e recupera tutto ciò che aveva perduto nelle parti di treccia o trecce precedenti. Queste fiabe infatti riportano il soggetto alla situazione di partenza - a casa sua - con un arricchimento. Il soggetto può occupare il posto iniziale dal quale era stato allontanato - lo stesso accade con la fiaba di Basile con la formula *Era il giorno in cui piovevano uva passa e fichi*. Il soggetto è di fatto eliminato - chiuso in un asilo anziché ucciso, ma non cambia nulla. Si può dire che queste fiabe sono trecce pettinabili. Nel caso delle fiabe di nozze regali si ha invece la moltiplicazione di due trecce, e nella seconda esiste almeno una linea che non era presente nella prima. O forse si potrebbe dire che esistono le stesse linee che si comportano in modo diverso nella seconda treccia. Certe fiabe inoltre possono risultare dalla moltiplicazione di più di due trecce: ogni treccia potrebbe corrispondere a ciascun movimento della descrizione di Propp, che può essere pensato in analogia ai movimenti di un brano musicale, nel quale alla fine e solo allora tutte le note si trovano in rapporto fra loro. La mia intuizione del 1980, della fiaba come un'unità molteplice, significa per me ora che ogni fiaba può essere rappresentata geometricamente: da una treccia ad esempio. In psicoanalisi, dove il racconto manca, credo occorrerebbe parlare di nodi, come aveva intuito Lacan. Ma senza comprendere il lavoro matematico sui nodi, le congetture, le dimostrazioni, il rapporto con l'insieme discreto, l'intuizione di Lacan rimane sterile. Può essere considerata una congettura tuttora da dimostrare. L'analogia fra un lavoro analitico e le trecce è comunque possibile pensando al transfert. La sofferenza di un soggetto, la sua treccia, può essere pettinata se e solo se in analisi si riattivano linee la cui immobilità aveva dato luogo a garbugli apparentemente inestricabili. D'altra parte il soggetto stesso è un nodo, che ha bisogno di muoversi nello spazio insieme ad altri nodi, o trecce, vedremo, non voglio dire sciocchezze. Ma non ho alcun dubbio sul fatto che molto si può formalizzare con questi strumenti: si può dare inizio a una formalizzazione che consenta di pensare alle varie mitologie psicoanalitiche in maniera unitaria, facendone quindi una teoria scientifica, con congetture, dimostrazioni, calcoli, nuove congettura, nuove dimostrazioni, all'infinito. Si può lavorare con l'infinito, che è il desiderio o l'ignoranza: senza queste due dimensioni non esiste psicoanalisi. Si tratta delle due dimensioni che ogni approccio psicoterapeutico non psicoanalitico deve escludere dal campo di lavoro. Si tratta delle dimensioni che contengono, in tanti casi, gli elementi fecondi che possono consentire una trasformazione altrimenti tanto poco probabile - a parte i miracoli - da apparire impossibile. Ora, non si tratta in analisi di miracoli né di suggestione, anche se questi due termini non sono esclusi dal lavoro. Ma essi non sono definibili, se non in maniera limitatissima, avvertendo che il rischio di operare in modo riduttivo può rendere questo lavoro insignificante. Si tratta di cogliere un seme piccolo a piacere e di cominciare a formalizzarlo.

[3] La soluzione di un intreccio inizialmente dato - dalla prima battuta di una fiaba a quando l'attante protagonista è in un guaio insormontabile o ha un compito impossibile - è una treccia che moltiplicata con la prima dà luogo a una treccia pettinabile? L'intervento della magia, attante magico oppure oggetto magico, rappresenterebbe una treccia particolare in grado di rendere pettinabile una trama che di per sé sarebbe irrimediabilmente intricata, dando luogo a un nodo scorsoio intorno al collo del soggetto, come accade nella fiaba *Ianco viso* di Basile, o nella vicenda di Margarita raccontata da Straparola? Questa del resto è analoga alla storia di Lisabetta da Messina di Boccaccio.

[4] Atena era per i greci la dea dell'intelligenza, della forza guerriera e, ciò che facilmente viene dimenticato - nonostante l'episodio di Aracne che ha dato nome a tutti i ragni del mondo - della tessitura e del ricamo.

Una donna che abbia intrecciato fili e ricamato, anche poco come me, non può non associare al lavoro dei matematici sui nodi e le trecce procedure come il macramè. Ma se avessi fatto altri pizzi ne associerei altri, il tombolo forse.

L'uncinetto e la maglia sono una treccia particolare. Con un solo nodo iniziale e una sola stringa si procede intrecciando, con movimenti del filo che passa sopra o sotto a se stesso e agli intrecci precedenti fino a che, alla fine del lavoro, è necessario un secondo nodo. Se il secondo nodo non viene fatto, il lavoro si disfa completamente tirando il filo, lasciando intatto soltanto il nodo iniziale. Il lavoro a maglia o all'uncinetto è quindi un non nodo delimitato da due nodi. Ma ripensando ad Atena, la tessitura e tutti i lavori femminili costruiscono nello spazio infiniti modelli in tutto il mondo, per vestire le persone e la casa: i nodi e le trecce in questo senso rappresentano il contributo femminile - nel senso di Atena - all'identità. Come la pelliccia o le squame proteggono l'animale, così il tessuto e il ricamo proteggono l'essere umano.

Il piacere di ricamare e tessere secondo M. L. von Franz ha a che fare con un fare un ordine, che possiamo definire morbido e bello, che corrisponde a un ordine nella complessità della realtà psichica femminile. Ma M. L. von Franz sbaglia, perché l'ordine che la donna costruisce tessendo e ricamando, come quello del matematico che lavora sul problema dei nodi e delle trecce, è ugualmente dedicato al maschio e alla femmina, al bambino e al vecchio. Non si riflette mai abbastanza sullo stratagemma della tela di Penelope: compagna e pari a Ulisse per intelligenza - sua è l'idea che Ulisse si finga pazzo seminando sale sulla riva e arando la sabbia - Penelope sospende la successione onorando il padre di suo padre, per il quale tesse il sudario. L'intelligenza femminile - a Ulisse Atena insegna spesso cosa fare, come Circe, che gli insegna come ascoltare le sirene senza morire - è probabilmente topologica, e per questo è stata considerata una forma di stupidità. Mi piace pensare che la nominazione dei nodi e delle trecce in geometria algebrica, con tanti nomi che ricordano il lavoro femminile, potrebbe rappresentare l'emersione alla coscienza dell'intelligenza femminile, che la donna ha avuto il compito di coltivare, ma che è semplicemente una prerogativa umana. In questo senso l'alta percentuale di omosessuali fra artisti e forse anche fra scienziati potrebbe indicare come la presenza delle due forme di intelligenza permetta innovazione ed espressione (G. Colli traduce in Eraclito *logos* con *espressione*) in misura maggiore di quella che si presenta fra uomini e donne etero. Che cioè per raggiungere e mantenere abbastanza la loro scelta e il loro piacere devono virare più marcatamente verso una delle due direzioni. In questo senso si potrebbe intendere il mito dell'androgino detto da Aristofane nel Simposio come l'atto fondante alla base della nostra struttura sociale: la divisione - castrazione - necessaria per rendere insopportabile la solitudine, per renderci più che necessari gli uni agli altri. E il discorso del commediografo indica la nostra irresistibile tendenza a fare uno, come recuperando la potenza pretesa originaria, prima del taglio, del fianco tolto ad Adamo per formargli Eva, prima del taglio del cordone ombelicale. Rispetto alla topologia che l'embrione probabilmente vive dal concepimento alla nascita, il taglio del cordone ombelicale è la prima operazione chirurgica, o di taglio e cucito. Si avvolge il cordone col filo, e si aspetta che cada. E d'altronde spesso il parto come operazione topologica prevede l'intervento di taglia-cuci. Che cos'è del resto assumere un'identità maschile o femminile, se non rinunciare, ripudiandola, all'altra parte? Lo sapevano meglio di noi le generazione passate che proibivano, partendo dal colore del corredino alla scelta dei giocattoli, a ciascun sesso di indossare gli abiti e giocare i giochi dell'altro sesso. Ricordo che quando non si poteva conoscere prima del parto il sesso del bambino la mamma diceva che si potevano fare capi di corredino in diversi colori, in bianco o in celeste, ma non in rosa: si poteva far indossare a una bambina un capo ricamato di celeste, mentre a un bambino era sconveniente far indossare qualcosa di rosa. Questo per me significa che l'assunzione del genere maschile è più delicata di quella del genere femminile.

E la confusione attuale, la nostra disperazione di fronte al fallimento dei rapporti, non ha forse a che fare col fatto che la debolezza dei maschi, la loro incoerenza, è insopportabile per le donne, così come la nostra autonomia, la nostra forza, è insopportabile per gli uomini? Non si dice forse che la treccia del maschio e quella della femmina devono avere, hanno, fili diversi? La castrazione originaria non consiste forse nel tagliare i fili dell'altro sesso? Non potrebbe essere stato questo il prezzo pagato originariamente dagli esseri umani? La loro debolezza da tutti i miti è connessa alla divisione dei generi, al loro diverso modo di rapportarsi alla divinità. Come avrebbe potuto l'essere umano tollerare l'organizzazione in gruppo, la stabilizzazione delle relazioni fra età diverse, la cura prolungata dei piccoli e dei vecchi e dei malati, la trasmissione di tutto questo, se non attraverso una specializzazione che implicava necessariamente una perdita di unità? I nostri fratelli animali vivono la sessualità per un periodo limitato, poi, dopo l'accoppiamento, e nei mammiferi femmine e negli uccelli e in certi pesci dopo l'accoppiamento e l'allevamento dei piccoli, tornano a essere individui per i quali la differenza di genere non implica una divisione di compiti legata al sesso, nulla comunque di paragonabile alla divisione che noi esseri umani conosciamo. Tutti devono cercare cibo, cacciare, muoversi, in branco, ma il branco differenzia nettamente i comportamenti maschili e femminili durante l'estro e durante l'allevamento dei piccoli. Pensieri che vanno molto, troppo lontano, e che con le trecce cercherò di intrecciare, a partire dalle fiabe. Ho tentato di pagare il debito verso il mio sesso e verso l'altro, e mio figlio mi dice che non l'ho fatto. E' vero, la mia rinuncia alla mia interezza è stata parziale, temporanea, quindi appare totale o inconsistente a chi l'ha compiuta fino in fondo, almeno secondo i criteri del senso comune. Ma siamo una generazione sperimentale, e altre generazioni sperimenteranno. Perché se la divisione non è più necessaria, se anzi si chiede a ogni soggetto di esprimersi come intero, una rivoluzione culturale e forse anche biologica potrebbe essere cominciata.